1、问题重述:

给定一个 MxN 的矩形区域，现用半径为 r 的圆对其进行完全覆盖，要求相邻两个圆相交的公共面积不小于一个圆面积的 k%。

1、怎应如何覆盖可使得完全覆盖整个图形时所用圆的个数最少（注：如果一个圆只有部分在图形中，也按一个计算）？

2、设 M=N=1000，r=1 00，则当 k=5 和 k=18 时，结果如何?

3、是否有一般性结论?

2，模型的假设与符号说明:

1.模型假设:

1.圆与圆的相交面积相同（即相交弦长相等）

2.当圆部分在矩形区域中时，仍算一个圆

3.圆环系中的弦与矩形的某些边时重合的，若不重合我们也可以经过简单的平移，使得矩形的某些边与弦线重合

2.符号:

每个圆的半径	r

最小相交圆面积占整个相交圆面积的百分比	**k**
矩形的长	**M**
矩形的宽	**N**
正多边形的边数	**n**
每条弦所对应的圆心角	θ
每条弦的弦长	**x**
弦到圆心的距离	**d**
覆盖矩形所需圆的个数	M_{pq}，**p** 为列个数，**q** 为行个数
弦所对应的弧长	**l**
扇形面积	$S_{扇}$
三角形面积	$S_{三角}$
相交圆面积	$S_{相交}$

3.模型的建立与求解

1，圆的弦所对应的圆心角

$$\theta = \frac{2\pi}{n}$$

2，弦与圆心角关系

$$l = \theta r$$

3，扇形面积

$$\mathbf{S}_{扇} = \frac{1}{2} lr$$

4，三角形面积

$$\mathbf{S}_{三角} = \frac{1}{2} r^2 Sin\theta$$

5，相交面积

$$\mathbf{S}_{相交} \geq k\% \pi r^2$$

6，对于相交面积的关系

$$\mathbf{S}_{扇} — \mathbf{S}_{三角} = \frac{1}{2} \mathbf{S}_{相交}$$

将以上式子整理即可得到：

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot r \cdot r - \frac{1}{2} \cdot r^2 Sin \frac{2\pi}{n} \geq \frac{1}{2} \cdot k\% \pi r^2$$

即：$$\frac{2\pi}{n} - Sin \frac{2\pi}{n} \geq k\% \cdot \pi$$

而对于一个相当大的矩形区域我们对其划分，将其划分为很多个正多边形。则这些正多边形应该具有刚好不重合地覆盖完整个矩形区域（对于边界上的正多边形我们可不做要求刚好覆盖）。

而对于正多边形的边数我们发现：

引理 **1** 在将矩形划分成正多边形中，正多边形能且只能是正三角形、正四边形和正六边形。

现在我们来证明引理 **1**：

证明：设在划分矩形为正 **n** 边形且 **n** ≥ **3**，正n边形的每个内角值为a，显然 $a=\dfrac{180°(n-2)}{n}$，我们设 $x=\dfrac{360}{a}$ （$x\geq 3, x\in N^*$），则

$$x=\frac{2n}{n-2}\Rightarrow n=\frac{2x}{x-2}=2+\frac{4}{x-2}$$

解方程得:

$$x=3，n=6; x=4, n=4; x=6, n=3$$ 。

即：在将矩形划分成正三角形中只可能是正三角形、正四边形、正六边形，因此，应选择正三角形、正四边形或正六边形拼接矩形区域。

现在我们对 **n** 取不同值时，讨论 **k** 的临界值：

方案一：当用正三角形划分矩形，即 **n=3** 时

$$\frac{2\pi}{3}-Sin\frac{2\pi}{3}\geq k\%\cdot\pi$$

解出临界点: **k_1=39.1002**

方案二：当用正四边形划分矩形，即 **n=4 时**

$$\frac{2\pi}{4}-Sin\frac{2\pi}{4}\geq k\%\cdot\pi$$

解出临界点: **k_2=18.1690**

方案三：当用正六边形划分矩形，即 **n=6** 时

$$\frac{2\pi}{6} - Sin\frac{2\pi}{6} \geq k\% \cdot \pi$$

解出临界点：　**k_3=5.7669**

故而：

1.当 $k_2 \leq k \leq k_1$ 时，我们选择用正三角形来划分矩形，所用正三角形的个数即为覆盖矩形所用最少圆的个数。

2.当 $k_3 \leq k \leq k_2$ 时，我们选择用正四边形来划分矩形，所用正四边形的个数即为覆盖矩形所用最少圆的个数。

3.当 $0 \leq k \leq k_3$ 时，我们选择用正六边形来划分矩形，所用正六边形的个数即为覆盖矩形所用最少圆的个数。

而对于给定圆与圆的相交面积为 **k_0** 时，我们也可以用以下不等式算出 **n** 的值

$$\frac{2\pi}{n} - Sin\frac{2\pi}{n} \geq k\% \cdot \pi \geq \frac{2\pi}{n+1} - Sin\frac{2\pi}{n+1} \quad （n \in N^*）$$

对于完全覆盖 $M \times N$ 矩形圆个数

的计算

对于方案一，对于 **n=3** 时，即当 $k_2 \le k \le k_1$ 时，

此时经过一系列验证，图形是不存在的。

对于方案二，对于 **n=4**，即当 $k_3 \le k \le k_2$ 时，所用圆个数：

对于每列个数 $\mathbf{m_{pj}}$：

$$m_{pj} \times \sqrt{2}r \ge N > (m-1)_{pj} \times \sqrt{2}r \text{其中} \left(m_{pj} \in N^*,\ j = 1,2,3,\ldots q \right)$$

解出 $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{N}{r} \le m_{pj} < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{N}{r}$ 且（$m_{pj} \in N^*$）

故而 $m_{pj} = \left\lceil \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{N}{r} \right\rceil$

同理对于每行个数 $\mathbf{m_{iq}}$：

$$m_{iq} \times \sqrt{2}r \ge M > (m-1)_{iq} \times \sqrt{2}r \text{其中} \left(m_{iq} \in N^*,\ i = 1,2,3,\ldots p \right)$$

解出 $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{M}{r} \le m_{iq} < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{M}{r}$ 且（$m_{iq} \in N^*$）

故而$m_{iq} = \left\lceil \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{M}{r} \right\rceil$

$$m_{pq} = m_{pj} \times m_{iq}$$

故而$m_{pq} = \left\lceil \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{N}{r} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{M}{r} \right\rceil$

对于方案三，对于 **n=6**，即当 $0 \le k \le k_3$ 时，所用圆个数为

当 n_{pj} 为奇数时有：

对于每列个数 $\mathbf{m_{pj}}$：

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}r + r + r + 2r + r + 2r + \cdots + 2r + r + r + \frac{1}{\sqrt{2}}r}_{m_{pj}} \ge N >$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}r+r+r+2r+r+2r+\cdots+2r+r}_{（m\text{-}1）_{pj}}\text{且}m_{pj}\text{为奇数}$$

解出：$\frac{3r+2N-2\sqrt{2}r}{3r}\le m_{pj}<\frac{2+\sqrt{2}}{3}+\frac{3r+2N-2\sqrt{2}r}{3r}$

故，$m_{pj}=\left\lceil\frac{3r+2N-2\sqrt{2}r}{3r}\right\rceil$且$m_{pj}$为奇数

对于每行个数 **m_{iq}**

$$m_{iq}\times\sqrt{2}r\ge M>(m-1)_{iq}\times\sqrt{2}r\text{其中}\left(m_{iq}\text{为奇数，}\ i=1,2,3,\ldots p\right)$$

解出 $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{M}{r}\le m_{iq}<1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{M}{r}$ 且（m_{iq}为奇数）

故而 $m_{iq}=\left\lceil\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{M}{r}\right\rceil$

当 m_{iq}为偶数时，$m_{iq}=m_{iq-1}+1$

所以用奇数行可以覆盖时，即 **p** 为奇数时

$$m_{pq}=m_{pj}\times m_{(2i-1)q}+m_{pj}\times m_{2iq}$$

$\left(i=1,2,\ldots p;\ j=1,2,\ldots q\right)$

当 n_{pj} 为偶数时有：

对于每列个数 m_{pj}：

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}r+r+r+2r+r+2r+\cdots+r+2r+r}_{m_{pj}}\geq N>$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}r+r+r+2r+r+\cdots+2r+r+r+\frac{1}{\sqrt{2}}r}_{（m\text{-}1）_{pj}}\text{且}m_{pj}\text{为偶数}$$

解出：$$\frac{2r+2N-\sqrt{2}r}{3r}\leq m_{pj}<\frac{4-\sqrt{2}}{3}+\frac{2r+2N-\sqrt{2}r}{3r}$$

故，$$m_{pj}=\left\lceil\frac{2r+2N-\sqrt{2}r}{3r}\right\rceil\text{且}m_{pj}\text{为偶数}$$

所以用偶数行可以覆盖时，即 **p** 为偶数，此时总的个数为:

$$m_{pq} = m_{pj} \times m_{(2i-1)q} + m_{pj} \times m_{2iq}$$

$$(i = 1,2,\ldots p;\ j = 1,2,\ldots q)$$

4 对于当 M=N=1000，r=1 00，则当 k=5 时，我们选择方案三计算，可得出所用总圆个数最少

经验证 p 为奇数，故有

$$m_{pj} = \left\lceil \frac{3r + 2N - 2\sqrt{2}r}{3r} \right\rceil \text{且} m_{pj} \text{为奇数}$$

$$= \left\lceil \frac{3\times100 + 2\times1000 - 2\sqrt{2}\times100}{3\times100} \right\rceil \text{且} p \text{为奇数}$$

=7

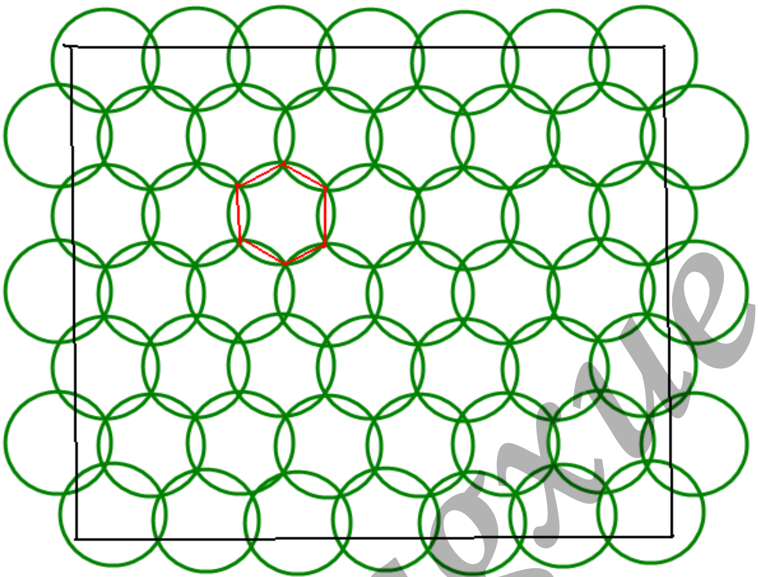
而经简单计算得，偶数行的列数为 8，而奇数行的列数为 7

所以：总的个数为:

$$m_{pq} = m_{pj} \times m_{(2i-1)q} + m_{pj} \times m_{2iq}$$

$$\left(i=1,2,\ldots p;\ j=1,2,\ldots q\right)$$

$$= 7\times4+8\times3=52$$



如图：

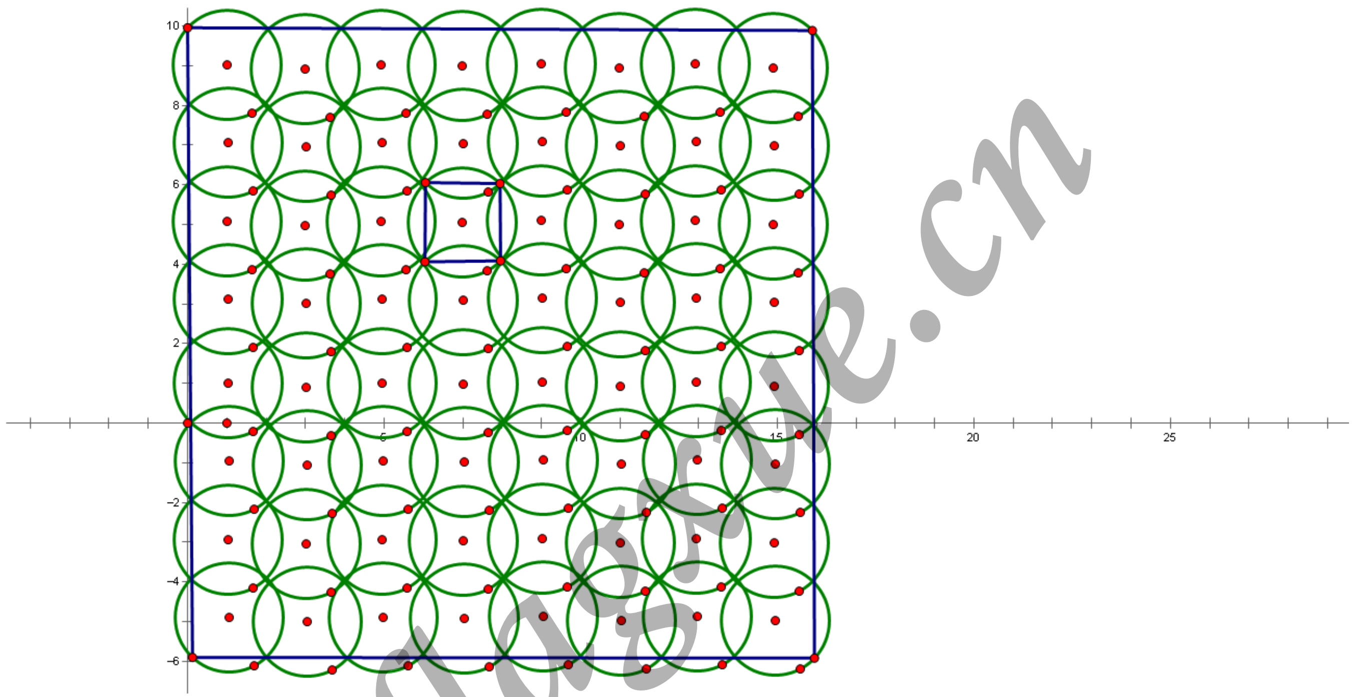
k=18 时，我们选择方案二计算，可得出所用总圆个数最少

故而 $m_{pj}=\left\lceil\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1000}{100}\right\rceil=8$

而 $m_{iq}=\left\lceil\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1000}{100}\right\rceil=8$

所以：$m_{pq}=m_{pj}\times m_{iq}=8\times8=64$个

如图：



5，模型的推广

此模型针对不同的 **k** 值做出了不同的讨论，最后得出一般结论：当 $k\le k_3$时，用正六边形来划分矩形区域，当 $k_3<k\le k_2$时，用正四边形来划分矩形区域，当 $k\ge k_2$时，是不存在这样的划分，即不存在这样的覆盖。而对于不等分隔圆时，我们可以由 **MxN** 来确定后进行每个相邻圆间相交面积相应的增调整，得出一般性规律。